Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного господарства та природокористування

Кафедра комп’ютерних наук та прикладної математики

04-01-40

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичних завдань з навчальної дисципліни **«Комп’ютерна дискретна математика»** (Частина 2)

для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Інженерія програмного забезпечення (Інтернет речей)» спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення (Інтернет речей)» та освітньо-професійною програмою «Комп'ютерні науки» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» денної та заочної форм навчання

Рекомендовано науково-методичною радою з якості ННІ АКОТ
Протокол № 9 від 29.05.2020 р

Рівне – 2020

Методичні вказівки для виконання практичних завдань з навчальної дисципліни «Комп'ютерна дискретна математика» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Інженерія програмного забезпечення (Інтернет речей)» спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення (Інтернет речей)» та освітньо-професійною програмою «Комп'ютерні науки» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» денної та заочної форм навчання [Електронне видання] / Мічута О. Р., Гладун Л. В. – Рівне : НУВГП, 2020. – 32 с.

Укладачі: Мічута О. Р., к.т.н, доцент кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики; Гладун Л. В., к.ф.-м.н, доцент кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики.

Відповідальний за випуск: Мартинюк П. М., д.т.н., професор, завідувач кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики.

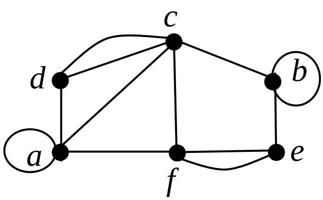
Керівники груп забезпечення спеціальностей:
121 «Інженерія програмного забезпечення» – Степанченко О. М., к.т.н., доцент, доцент кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики;
електротехнічних та комп'ютерно-інтегрованих технологій.
122 «Комп'ютерні науки» – Мартинюк П. М., д.т.н., професор, завідувач кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики

З М І С Т

<u>Тема 1.</u> Основи теорії графів.

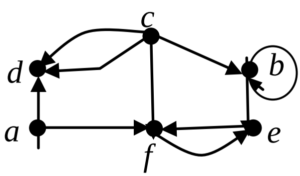
Приклади розв'язування задач.

Приклад 1. Знайти кількість вершин, ребер та степені кожної вершини неорієтованого графа.



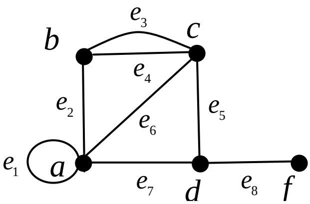
Розв'язок. Оскільки граф містить кратні ребра та петлі, то він є псевдографом. У ньому шість вершин та дванадцять ребер. Знайдемо степені вершин: $\deg(a)=5$, $\deg(d)=3$, $\deg(c)=5$, $\deg(b)=4$, $\deg(e)=3$, $\deg(f)=4$.

Приклад 2. Знайти кількість вершин та дуг і знайти півстепені входу та виходу для кожної вершини орієтованого графа.



Розв'язок. Оскільки граф містить кратні дуги та петлю, то він є орієнтованим мультиграфом. У ньому шість вершин та десять дуг. Знайдемо півстепені входу вершин: $\deg^-(a)=0$, $\deg^-(d)=3$, $\deg^-(c)=0$, $\deg^-(b)=2$, $\deg^-(e)=2$, $\deg^-(f)=3$. Півстепені виходу вершин рівні: $\deg^+(a)=2$, $\deg^+(d)=0$, $\deg^+(c)=4$, $\deg^+(b)=2$, $\deg^+(e)=1$, $\deg^+(f)=1$.

Приклад 3. Задати неорієнтований граф матрицями інцидентності та суміжності.



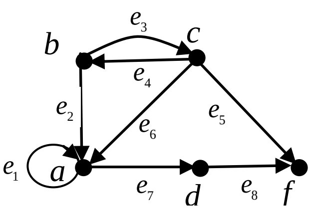
Розв'язок. Матриця інцидентності заданого псевдографа для послідовності вершин a, b, c, d, f та заданій нумерації ребер має вигляд:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця суміжності псевдографа для послідовності вершин a, b, c, d, f виглядає так:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4. Задати орієнтований граф матрицями інцидентності та суміжності.



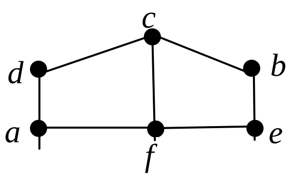
Розв’язок. Матриця інцидентності заданого орієнтованого мультиграфа для послідовності вершин a, b, c, d, f та заданій нумерації дуг має вигляд:

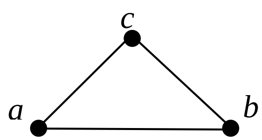
$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матриця суміжності орієнтованого мультиграфа для послідовності вершин a, b, c, d, f виглядає так:

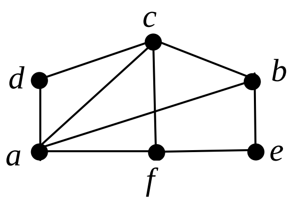
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 5. Знайти об’єднання та перетин графів:

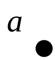




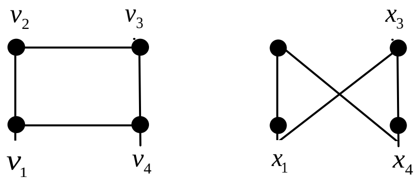
Розв’язок. Об’єднанням графів є граф



Перетином графів є одна вершина



Приклад 6. Довести, що графи $G_1 = (V_1, E_1)$ та $G_2 = (V_2, E_2)$ є ізоморфними.



Розв'язок. Побудуємо бієкцію $\varphi : V_1 \to V_2$ між множинами вершин цих двох графів: $\varphi(v_1) = x_1$, $\varphi(v_2) = x_2$, $\varphi(v_3) = x_4$, $\varphi(v_4) = x_3$.

Доведемо, що бієкція зберігає відношення суміжності між вершинами графів. Це означає наступне: якщо деякі довільні вершини $a, b \in V_1$ є суміжними у графі G_1, тобто $\{a, b\} \in E_1$, то й відповідні їм вершини $\varphi(a), \varphi(b) \in V_2$ також будуть суміжними у графі G_2, тобто $\{\varphi(a), \varphi(b)\} \in E_2$.

Перевірку проведемо для кожної з вершин графу G_1.

Вершина v_1 графа G_1 суміжна вершинам v_2 та v_4. Оскільки їй відповідає вершина x_1 графа G_2, яка суміжна вершинам $x_2 = \varphi(v_2)$ та $x_3 = \varphi(v_4)$, то відношення суміжності для вершини v_1 зберігається.

Із вершиною v_2 графа G_1 суміжні вершини v_1 та v_3, яким відповідають вершини x_1 та x_4 графа G_2. Ці вершини є суміжними вершині $x_2 = \varphi(v_2)$.

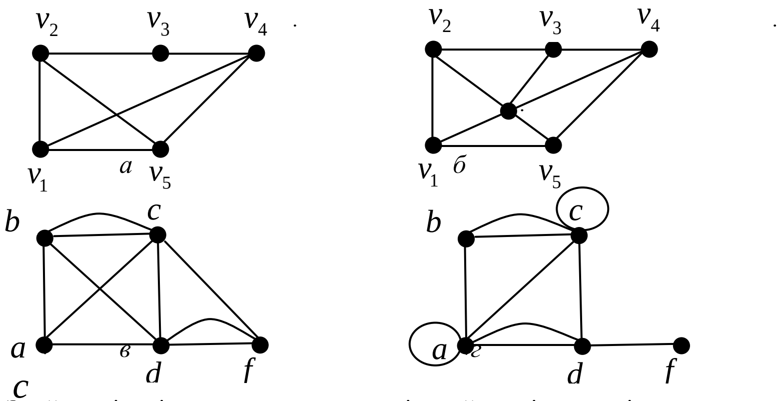
Вершина v_3 графа G_1 суміжна вершинам v_2 та v_4. Оскільки їй відповідає вершина x_4 графа G_2, яка суміжна вершинам $x_2 = \varphi(v_2)$ та $x_3 = \varphi(v_4)$, то відношення суміжності для вершини v_3 зберігається.

Для вершини v_4 суміжними є вершини v_3 та v_1. Так як відношення суміжності для цих вершин зберігається, то воно збережеться і для вершини v_4.

Отже, бієкція φ зберігає відношення суміжності між вершинами графів. А це означає, що графи G_1 та G_2 ізоморфні.

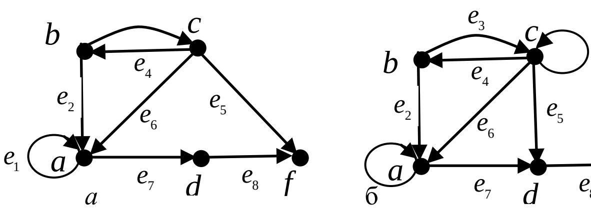
Задачі.

1. Знайти кількість вершин, ребер та степені кожної вершини неорієтованих графів.



2.

2. Знайти кількість вершин та дуг і знайти півстепені входу та виходу для кожної вершини орієтованих графів. Для кожного з графів задачі визначити суму півстепенів входу та суму півстепенів виходу верщин. Переконатись, що кожна з них дорівнює кількості дуг графа.



3. Скільки ребер має граф, у якого вершини мають степені 3, 3, 4, 2, 2 ? Зобразити його.

4. Скільки ребер має граф, у якого вершини мають степені 3, 2, 4, 2, 1 ? Зобразити його.

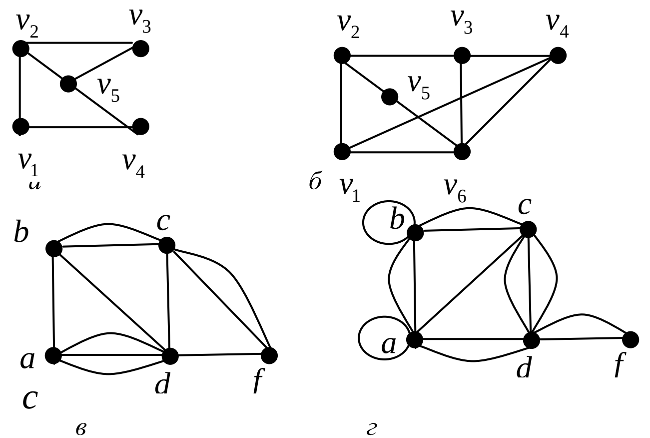
5. Чи існує простий граф зі заданими вершинами степенів? Якщо так, то зобразити його.

а) 4, 3, 2, 1, 1; *б*) 4, 4, 3, 3, 2, 2; *в*) 4, 2, 3, 1, 3, 3; *г*) 2, 2, 3, 3, 1, 1; *д*) 2, 3, 4, 3, 2; *е*) 1, 2, , 3, 4, 5, 6.

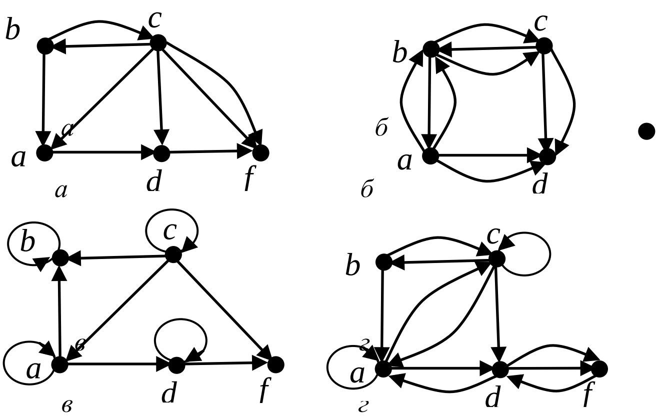
6. Побудувати графи.

а) K_6; *б*) $K_{1,7}$; *в*) $K_{3,4}$; *г*) C_6; *д*) W_6 .

7. Задати неорієнтовані графи матрицями інцидентності.



8. Задати орієнтовані графи матрицями інцидентності.



9. Задати неорієнтовані графи задачі 7 матрицями суміжності.

10. Задати орієнтовані графи задачі 8 матрицями суміжності.

11. Зобразити неорієнтовані графи за матрицями суміжності.

а) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, *б*) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

в) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. *г*) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

12. Зобразити орієнтовані графи за матрицями суміжності.

а) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *б*) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

в) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *г*) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

13. Довести, що у будь-якому графі кількість вершин, степінь яких непарний, є парною.

14. Нехай у графі G з n вершинами і m ребрами є p вершин степеня t, а всі інші вершини мають степінь $t+1$. Довести, що $p=(t+1)n-2m$.

15. У футбольному турнірі беруть участь 25 команд. Довести, що в будь-який момент знайдеться команда, яка зіграла парну кількість матчів.

16. Довести, що в будь-якому графі з n вершинами ($n>2$) завжди знайдуться принаймні дві вершини з однаковими степенями.

17. Побудуйте граф із п’ятьма вершинами, в якому тільки дві вершини мають однакові степені.

18. У графі з п’ятьма вершинами тільки дві вершини мають однакові степені. Чи можуть обидві ці вершини мати степінь 0 або степінь 4?

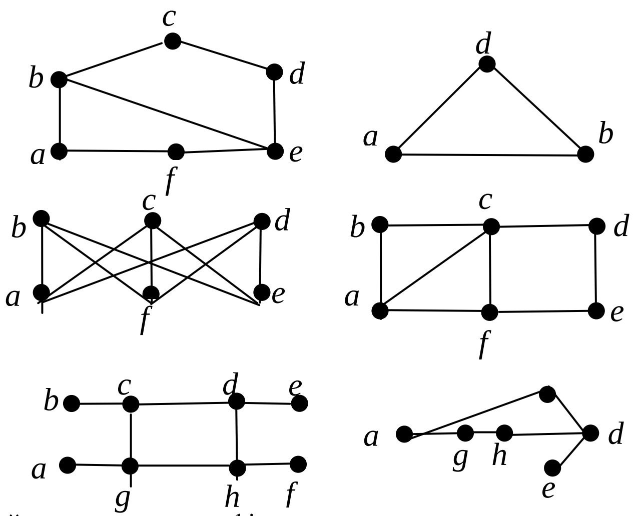
19. Декілька осіб проводять шаховий турнір в одне коло. У деякий момент виявилося, що тільки двоє шахістів зіграли однакову кількість партій. Довести, що тоді є або тільки один учасник, який не зіграв жодної партії, або тільки один, який зіграв усі партії турніру.

20. Знайти об’єднання та перетин графів.

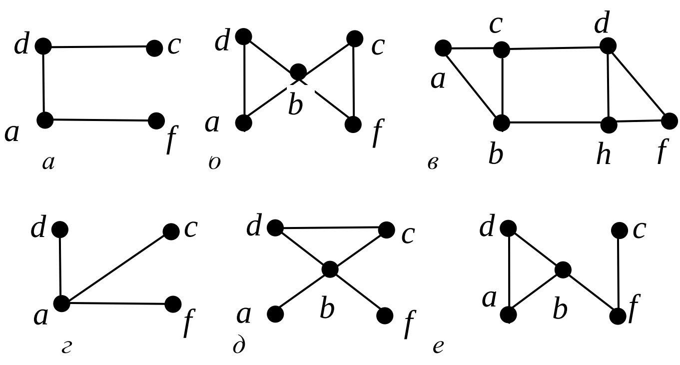
а

б

в



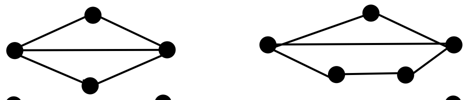
21. Знайти доповнення графів



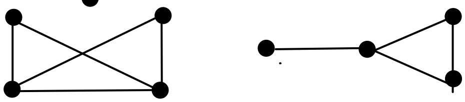
22. Довести, що всі ізоморфні графи мають однакову кількість вершин і однакову кількість ребер.

23. Пояснити, чому пари графів не є ізоморфними.

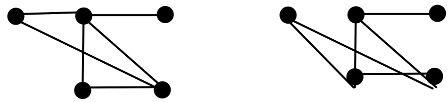
а



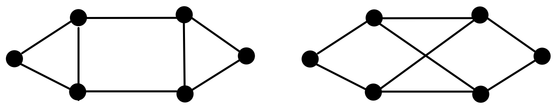
б



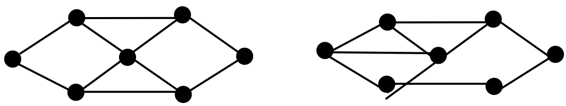
в



г



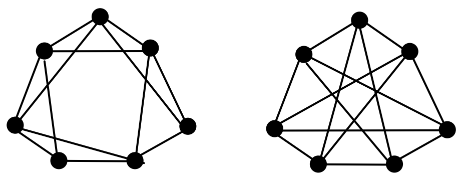
д



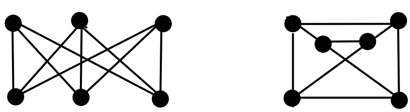
24. Довести, що пари графів є ізоморфними.

а

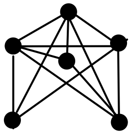
б

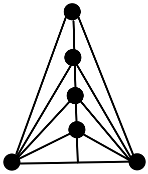


в



г





25. Перевірити, чи є ізоморфними графи G_1 і G_2, задані своїми матрицями суміжності A_1 і A_2.

$$а)\ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$б)\ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$в)\ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

г) $$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

д) $$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

26. Граф G, ізоморфний своєму доповненню $\bar{G}$, називається самодоповнювальним. Довести, що графи G_1 і G_2 ізоморфні тоді і тільки тоді, коли ізоморфні їхні доповнення $\bar{G}_1$ і $\bar{G}_2$.

27. Знайти нетривіальний самодоповнювальний граф із найменшою кількістю вершин.

28. Довести, що існує тільки один самодоповнювальний граф із чотирма вершинами.

29.. Довести, що існує тільки два самодоповнювальні графи з п'ятьма вершинами.

30. Чи існує самодоповнювальний граф, у якого кількість ребер дорівнює:

а) 5; *б*) 7; *в*) $4k^2-2,\ k\in N$

31. Чи існує самодоповнювальний граф, у якого кількість ребер дорівнює:

а) 6; *б*) 7; *в*) $4k-1,\ k\in N$?

32. Довести, що кількість вершин будь-якого самодоповнювального графа дорівнює або $4k$, або $4k+1,\ k\in N$.

33. Довести, що довільний самодоповнювальний граф містить або $4k^2-k$, або $4k^2+k$ ребер $k\in N$.

34. Побудувати чотири попарно неізоморфні самодоповнювальні графи з вісьмома вершинами.

35. Побудувати всі попарно неізоморфні графи із шістьма вершинами, степені яких дорівнюють 5, 3, 3, 3, 2, 2.

36. Скільки існує попарно неізоморфних графів, які мають:

а) 6 вершин і 11 ребер;

б) 7 вершин і 18 ребер;

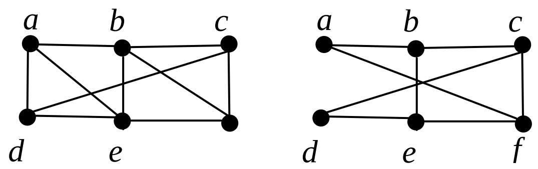
в) 8 вершин і 24 ребра;

г) 8 вершин, сума всіх степенів яких не менша від 53;

г) 10 вершин і 43 ребра;

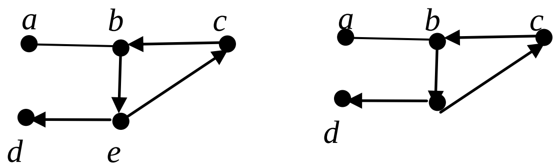
д) n вершин і $n(n-1)/2-2$ ребра?

37. Знайти кількість шляхів довжини n між вершинами c та d у простих графах для значень n, що дорівнюють 2, 3, 4, 5, 6, 7.



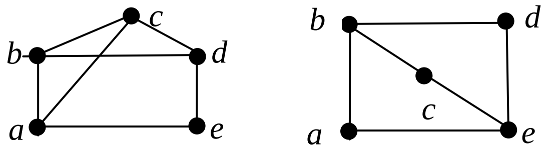
а *б*

38. Знайти кількість шляхів довжини n між вершинами a та e в орієнтованих графах для значень n, що дорівнюють 2, 3, 4, 5, 6, 7.

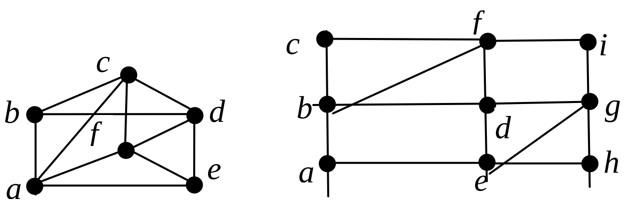


а *б*

39. Визначити, які з графів мають ейлерів цикл. Зобразити його.



а *б*



в *г*

40. Який з графів задачі 39 має ейлеровий шлях, але не має ейлерового циклу?

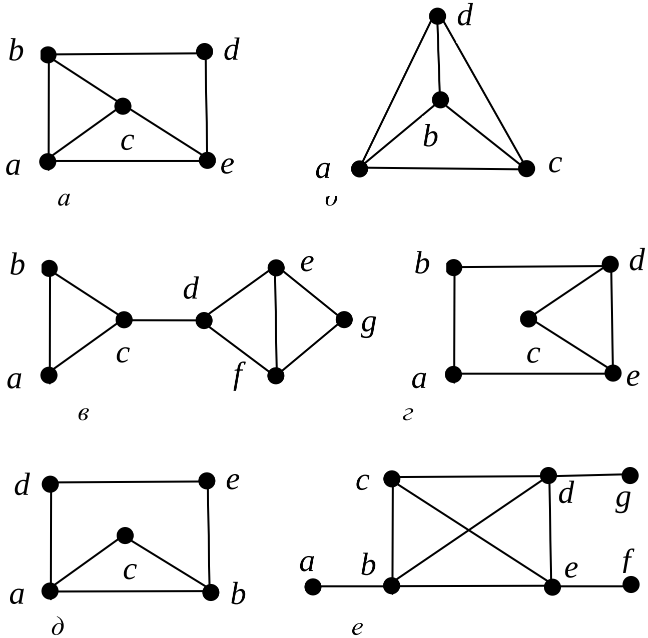
41. Для яких значень n графи *а* - *г* мають ейлерів цикл?

а) K_n ; *б*) C_n ; *в*) W_n ; *г*) Q_n .

42. Для яких значень n графи *а* - *г* мають ейлерів шлях, але не мають ейлерового циклу?

а) K_n ; *б*) C_n ; *в*) W_n ; *г*) Q_n .

43.Які з графів мають гамільтонів цикл?



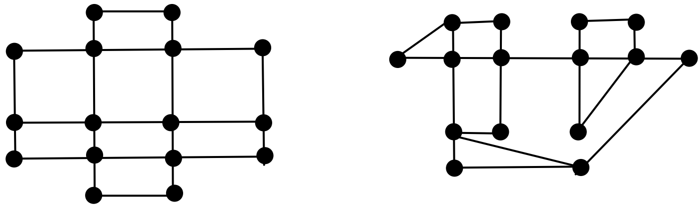
44. Які з графів задачі 43 , що не мають гамільтонового циклу, мають гамільтоновий шлях?

45. Для яких значень n графи *а* - *г* мають гамільтонів цикл?

а) K_n ; *б*) C_n ; *в*) W_n ; *г*) Q_n .

46. Охарактеризувати графи, які є одночасно ейлеровими і гамільтоновими.

47. На рис. зображено схеми музеїв, у яких вершинами є зали музеїв, а ребрами – переходи між ними. Визначити, з якого залу потрібно розпочати екскурсію і в якому завершити для того, щоб провести відвідувачів по всіх залах, пройшовши по кожному з переходів один раз. Знайти один з таких маршрутів.



48. Визначити, які з повних графів K_n є ейлеровими?

49.Для яких значень n і m граф $K_{n,m}$ є ейлеровими?

50. Довести, що в повному графі K_n існує гамільтонів цикл для довільного $n \geq 3$.

51. Довести, що в повному дводольному графі $K_{n,n}$ існує гамільтонів цикл для довільного натурального n.

52. Для яких значень n і m граф $K_{n,m}$ є гамільтоновим?

53. Довести, що граф $K_{n,m}$ не є гамільтоновим, якщо $n \neq m$.

54. Чи існує в графі K_5 цикл довжини 9?

55. Довести, що число різних дерев, які можна побудувати на n даних вершинах, дорівнює n^{n-2}.

56. Довести, що у будь-якому дереві з n вершинами, $n \geq 2$ є принаймні дві кінцеві вершини.

57. Скільки вийде шматків паперу, якщо спочатку було 4 шматки, деякі розрізали на 4 частини, а всього було розрізано 15 шматків?

58. Намалювати граф із сімома вершинами і шістьма ребрами, який не має жодного циклу.

59. Побудувати всі попарно неізоморфні дерева, які мають:

а) 6 ребер та 3 кінцеві вершини;

б) 6 ребер та 4 кінцеві вершини;

в) 7 ребер та 3 кінцеві вершини;

г) 8 ребер та 3 вершини степеня 3.

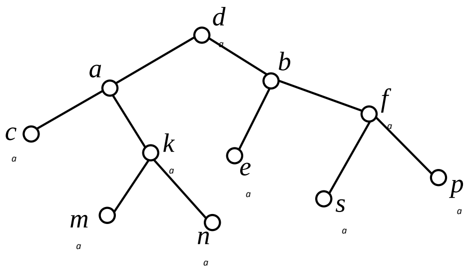
Контрольні запитання.

1. Який граф називається мультиграфом?
2. Який граф називається неорієнтованим?
3. Які вершина та ребро називають інцидентними?
4. Який граф називається дводольним?
5. Які ви знаєте способи задання графа?
6. Чим відрізняються матриці суміжності для орієнтованого та неорієнтованого графа?
7. Опишіть структуру кореневого дерева.

<u>Тема 2.</u> Дерева.

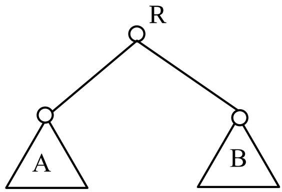
Приклади розв'язування задач.

Приклад 1. Нехай маємо бінарне дерево. Здійснити різні обходи даного дерева.



Розв'язок.

Розглянемо найпростіші способи обходу бінарного кореневого дерева.



Прямий обхід або обхід зверху вниз задається послідовністю R, A, B. В нашому випадку маємо

$$dackmnbefsp$$

Внутрішній обхід або обхід зліва направо задається A, R, B. В нашому випадку маємо

$$camkndebsfp$$

Обхід у зворотньому порядку або знизу вверх задається A, B, R. В нашому випадку маємо

$$cmnkaespfbd$$

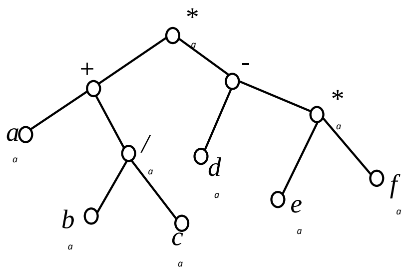
Приклад 2.

Подати заданий арифметичний вираз у вигляді бінарного дерева. Записати заданий вираз у префікс ній та постфікс ній формах.

$$\left(a+\frac{b}{c}\right)(d-ef)$$

Розв'язок.

При представленні виразу у вигляді бінарного дерева змінні та операції виступають вершинами дерева, а порядок виконання задає орієнтацію ребер, які з'єднують ці вершини.



Обійдемо це дерево, виписуючи символи у вершинах у тому порядку, в якому вони зустрічаються при заданому способі обходу. Отримаємо такі три послідовності

1. У разі обходу в прямому порядку – *польський запис* (префіксний): *+a/bc-d*ef.

2. У разі обходу в зворотному порядку – *зворотній польський запис* (постфіксний): abc/+def*-*.

Приклад 3. Обчислити значення виразу в польському записі

+-*235/↑234

Розв'язок.

Крок	Вираз	Виділені символи	Виконані операції
1	+-*235/↑234	↑23	2^3=8
2	+-*235/84	/84	8/4=2
3	+-*2352	*23	3*2=6
4	+-652	-65	6-5=1
5	+12	+12	1+2=3
6	3		

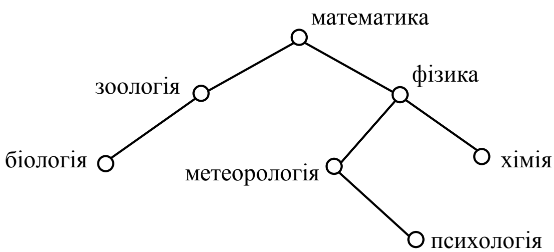
Приклад 4. Обчислити значення виразу в зворотному польському записі.

723*-4↑93/+

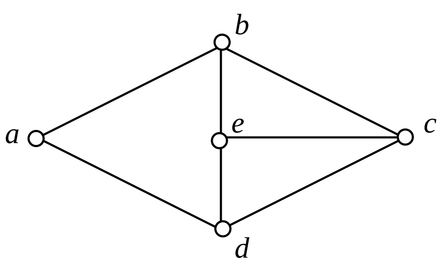
Розв'язок.

Крок	Вираз	Виділені символи	Виконані операції
1	723*-4↑93/+	23*	2*3=6
2	76-4↑93/+	76-	7-6=1
3	14↑93/+	14↑	1^4=1
4	193/+	93/	9/3=3
5	13+	13+	1+3=4
6	4		

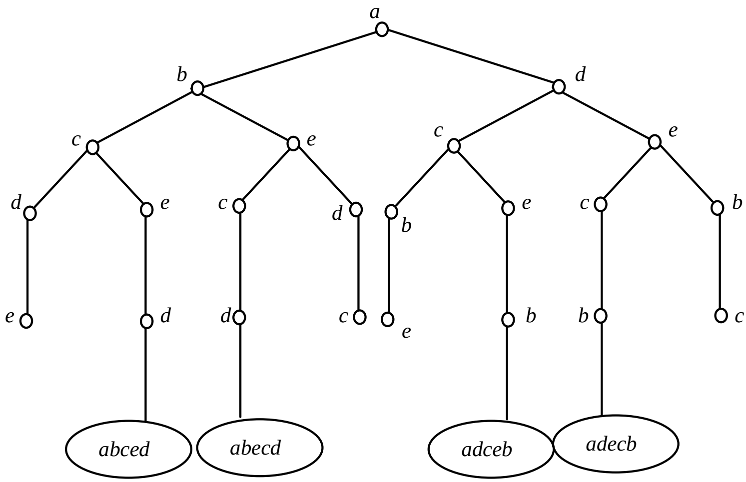
Приклад 5. Побудувати бінарне дерево пошуку для списку слів в українському алфавіті: математика, фізика, зоологія, метеорологія, біологія, психологія, хімія.
Розв'язок.



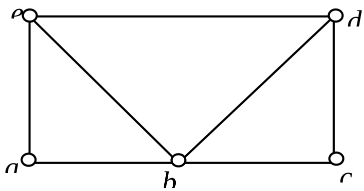
Приклад 6.
Побудувати всеможливі гамільтонові цикли для заданого графа використовуючи алгоритм пошуку з поверненням.



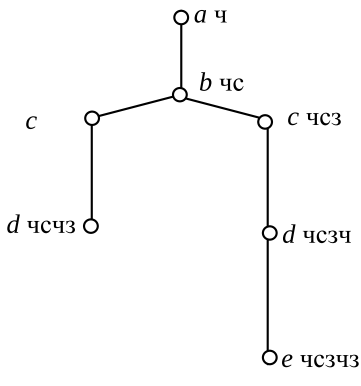
Розв'язок.



Приклад 7. Розфарбувати заданий граф в 3 кольори.

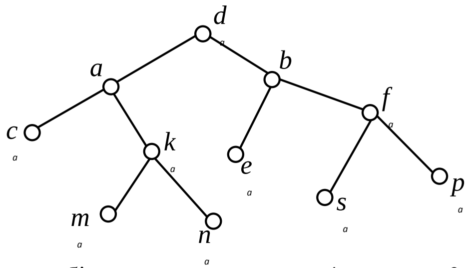


Розв'язок.



Задачі

1. Визначити рівень кожної вершини та висоту дерева, зображеного на малюнку



2. Побудувати повне бінарне дерево висоти 4 та повне 3-арне дерево висоти 3.
3. Зобразити наступні вирази використовуючи кореневі дерева. Записати ці вирази в інфіксній, префіксній та постфіксній формах.

a) $\dfrac{cos^3 t^2}{1,5t+2}$,

b) $\dfrac{x^3+2x}{3cos\sqrt{x}+1}$,

c) $\dfrac{t+sin\,2t}{t^2-3}$,

d) $\dfrac{x^3-2}{3\,ln\,x}$,

e) $\dfrac{2,3t+8}{|2\,cos\,t|+1}$,

f) $\dfrac{arccos\,x}{2x+1}$,

g) $\dfrac{5tg(x+7)}{(x+3)^2}$,

h) $\dfrac{1,5t-ln\,2t}{3t+1}$,

i) $\dfrac{2,5x^3}{e^{2x}+2}$,

j) $\dfrac{3x-2}{2arctg\,|x|+1}$.

4. Зобразити наступні логічні вирази використовуючи кореневі дерева. Записати ці вирази в інфіксній, префіксній та постфіксній формах.

a) $\overline{(a \to b)} \wedge \overline{(ab)} \vee b,$

b) $(a \vee b)(b \to a) \vee ac,$

c) $(a \to b) \to \overline{b},$

d) $(a \to b)(a \vee bc)(a \to c) \vee \bar{c}$,

e) $(a \vee b)(b \to a) \vee bc \vee a\bar{b} \vee b\bar{c}$,

f) $(a \vee (b \to c))(a \vee b \vee c)(a \vee c \vee d)$,

g) $\bar{a}bc \vee a\bar{b}c \vee abc$,

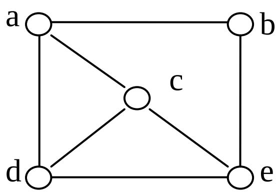
h) $\left(\overline{(b \vee c)} \to bcd\right) \vee \bar{b}d$,

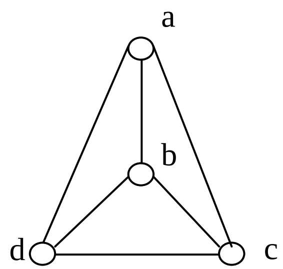
i) $ab \vee a\bar{c} \vee (\bar{a} \to b) \vee a \vee b\bar{c}$,

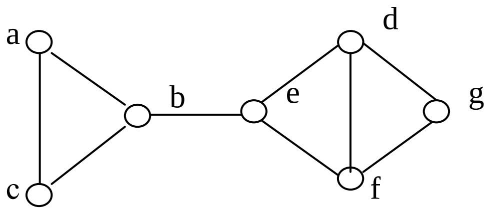
j) $\overline{(c \to \neg b)} \vee \bar{b}a \vee b\bar{c} \to \bar{c}$.

5. Зобразити впорядковане кореневе дерево, яке відповідає кожному з заданих виразів, записаних у префіксній формі. Записати їх у постфікс ній формі:
   a) $\uparrow + 23 - 51$,
   b) $+ * + - 53214$,
   c) $* / 93 + * 24 - 76$.
6. Обчислити значення виразу, записаного в префіксній формі:
   a) $- * 2 / 843$,
   b) $\uparrow - * 33 * 425$,
   c) $+ - \uparrow 32 \uparrow 23 / 6 - 42$,
   d) $* + 3 + 3 \uparrow 3 + 333$.
7. Обчислити значення виразу, записаного в постфіксній формі:
   a) $93/5+72-*$,
   b) $521--314++*$,
   c) $32*2\uparrow 53-84/*-$.
8. Побудувати кореневе дерево, обхід якого зверху вниз дає послідовність $a\,b\,f\,c\,g\,h\,i\,d\,e\,j\,k\,l$, причому вершина a має чотирьох синів, c - трьох, j - двох, b та e - по одному, а решта вершин є листками.

9. Побудувати бінарне дерево пошуку для слів: *банан, слива, персик, яблуко, кокос, манго, папая.*
10. Скільки порівнянь необхідно, щоб знайти або додати кожне з наступних слів у дерево пошуку із задачі 9.
    a) персик
    b) банан
    c) виноград
    d) апельсин
11. Використовуючи бектрекінг, знайти усі гамільтонові цикли у графі







Контрольні запитання

1. Який граф називається кореневим деревом? Наведіть приклад такого графа.
2. Назвіть типи обходів бінарних дерев. Наведіть приклади.
3. Опишіть структуру кореневого дерева.
4. Опишіть роботу алгоритму бектрекінг.
5. Дайте означення бінарного дерева.
6. Дайте означення упорядкованого кореневого дерева.

<u>Тема 3.</u> Відношення.

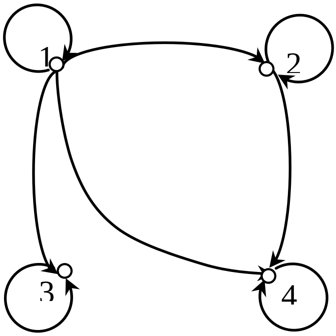
Приклади розв'язування задач.

Приклад 1. Нехай $A=\{1,2,3,4\}$. Які впорядковані пари утворюють відношення $R=\{(a,b)\,|\,a \text{ ділить } b\}$?

Розв'язок. Очевидно, що відношення R має вигляд $R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$.

Приклад 2. Зобразити отримане в прикладі 1 відношення у вигляді графу та матриці.

Розв'язок.



$$M=\begin{Vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}$$

Приклад 3. Розглянемо наступні відношення на множині $A=\{1,2,3,4\}$:

R_1= {(1,1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)}
R_2= {(1, 1), (1, 2), (2, 1)}
R_3= {(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)}
R_4= {(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)}
R_5= {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)}
R_6= {(3, 4)}

Дослідіть властивості даних відношень.

Розв'язок.

Відношення R_3 та R_5 рефлексивні, бо вони містять усі пари вигляду (a,a), тобто пари (1,1), (2,2), (3,3), (4,4). Решта відношень не рефлексивні.

Відношення R на множині A називається ***іррефлексивним,*** якщо $\forall a \in A : (a,a) \notin R$. Наприклад, відношення R_4 та R_6 – іррефлексивні, а відношення R_1 та R_2 – не рефлексивні й не іррефлексивні.

Відношення R на множині A називається ***симетричним,*** якщо $\forall a,b \in A$ з того, що $(a,b) \in R$ випливає, що $(b,a) \in R$. Для нашого прикладу дана властивість виконується лише для відношень R_3 та R_2.

Відношення R на множині A називається ***антисиметричним,*** якщо $\forall a,b \in A$ з того, що $(a,b) \in R$ і $(b,a) \in R$, випливає, що $a = b$. Інакше кажучи, відношення антисиметричне, якщо в разі $a \neq b$ воно одночасно не містить пар (a,b) і (b,a). В нашому випадку антисиметричні лише відношення R_4, R_5, R_6. У кожному з них немає таких пар елементів a та b ($a \neq b$), що одночасно $(a,b) \in R$ і $(b,a) \in R$.

Відношення R на множині A називається ***асиметричним*** якщо $\forall a,b \in A$ з того, що $(a,b) \in R$ випливає, що $(b,a) \notin R$. Зрозуміло, що будь яке асиметричне відношення має бути і антисиметричним. Обернене твердження неправильне. Відношення R_5 антисиметричне , проте не асиметричне, оскільки містить пари (1,1), (2,2), (3,3), (4,4).

Відношення R на множині A називається ***транзитивним***, якщо $\forall a,b,c \in A$ з того, що $(a,b) \in R$ і $(b,c) \in R$ випливає, що $(a,c) \in R$. Відношення R_4, R_5, R_6 – транзитивні, оскільки вони відповідають вищенаведеному означенню. Відношення R_1, R_2, R_3 не транзитивні, оскільки: $(3,4) \in R_1$, $(4,1) \in R_1$, але $(3,1) \notin R_1$; $(2,1) \in R_2$, $(1,2) \in R_2$, але $(2,2) \notin R_2$; $(2,1) \in R_3$, $(1,4) \in R_3$, але $(2,4) \notin R_3$.

Приклад 4. Нехай A={1, 2, 3} та B={1, 2, 3, 4}. Визначимо відношення R_1 та R_2 з A в B:
R_1={(1, 1), (2, 2), (3, 3)}
R_2={(1, 2), (1, 1), (1, 3), (1, 4)}
Знайти $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 \setminus R_2$.
Розв'язок.

$R_1 \bigcup R_2$ ={(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (1, 4)}
$R_1 \bigcap R_2$ ={(1, 1)}
$R_1 \setminus R_2$ ={ (2, 2), (3, 3)}

Задачі

1. $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Задати в явному виді (списком) і матрицею відношення $R \subseteq A \times A$, якщо відношення R означає "*їхня сума – просте число*".
2. $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Задати в явному виді (списком) і матрицею відношення $R \subseteq A \times A$, якщо відношення R означає "*їхня сума – складне число*".
3. Множина M - булеан множини $A=\{1,2,3,4\}$, $(M=P(A))$. Скласти матриці відношень R_1, R_2, R_3 заданих на системі множин M, якщо R_1 - "*бути строгим включенням*", R_2 - "*бути доповненням до*", R_3 - "*перетинатися з*". Задати відношення R_1, R_2, R_3 описом його характеристичних властивостей.
4. Відношення R визначене на множині $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Задати списком і матрицею відношення $R=\{\langle a,b\rangle | a,b \in A,\ \ (a+b)\text{- парне}\}$.
5. Відношення R визначене на множині $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Задати списком і матрицею відношення $R=\{\langle a,b\rangle | a,b \in A,\ \ b\text{ - }\textit{дільник}\ \ (a+b),\ b \neq 1\}$.
6. Відношення R визначене на множині $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Задати списком і матрицею відношення $R=\{\langle a,b\rangle | a,b \in A,\ \ (a+2)\text{ - дільник }\ (a+b)\}$.
7. Для визначених нижче відношень привести приклади пар, для яких виконуються відношення і, навпаки, не виконуються:

а) відношення на множині точок дійсної площини:

R_1 - "*знаходитися на колі* $x^2+y^2=16$";

R_2 - "*знаходитися усередині кола* $x^2+y^2=16$";

R_3 - “*знаходитися зовні кола* $x^2 + y^2 = 16$”;

R_4 - “*бути точкою перетину ліній* $x^2 + y^2 = 1$ *й* $y = x^3$”;

R_5 - “*знаходитися на прямій* $2x + 5y = 10$”.

б) відношення на множині студентів вашої групи:

R_6 - “*сидіти за однією партою*”;

R_7 - “*знаходитися за…у списку студентів академгрупи*”;

R_8 - “*мають однаковий середній бал за результатами сесії*”.

д) відношення, задані на множині міст України:

R_9 - “*знаходитися в одній області*”;

R_{10} - “*знаходитися в сусідніх областях*”;

R_{11} - “*знаходитися по одну сторону ріки Дніпро*”

8. Які властивості мають відношення:

А) На множині натуральних чисел N :

а) R_1 - “бути не менше”;

б) R_2 - “бути рівним”;

в) R_3 - “їхня сума – парне число”.

Б). На множині точок дійсної площини R :

а) R_4 - “бути на одній відстані від початку координат”;

б) R_5 - “бути симетричним щодо осі Oy”;

в) R_6 - “знаходитися в одному квадранті”.

В). На множині: «велика кількість людей»:

а) R_7 - “бути дочкою”;

б) R_8 - “бути сестрою”;

в) R_9 - “жити в одній країні”.

9. $A = \{a, b, c, d, e\}$, а R_1, R_2, R_3, R_4 - відношення на A:

$R_1 = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle b,d\rangle, \langle c,e\rangle, \langle e,d\rangle, \langle c,a\rangle\}$;

$R_2 = \{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,c\rangle, \langle b,d\rangle, \langle e,e\rangle, \langle d,e\rangle, \langle c,b\rangle\}$;

$R_3 = \{\langle a,b\rangle,\langle a,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle e,e\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$
;
$R_4 = \{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle e,e\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle d,d\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$.

Побудувати матриці заданих відношень і з'ясувати, яке з них:
а) симетричне?
б) рефлексивне?
в) транзитивне?
г) антисиметричне?

10. $A = \{a,b,c,d,e\}$. Опишіть відношення на A:
а) рефлексивне, але не симетричне, не транзитивне;
б) симетричне, але не рефлексивне, не транзитивне;
в) транзитивне, але не симетричне, не рефлексивне;
г) рефлексивне і симетричне, але не транзитивне;
д) симетричне і транзитивне, але не рефлексивне.

11. Якими властивостями характеризуються наступні відношення на множині $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$:
а) $R_1 = \{\langle a,b\rangle | a+b \ \ - \ \ \text{непарне}\}$;
б) $R_2 = \{\langle a,b\rangle | (a+2) \ \ - \ \ \textit{дільник} \ \ (a+b)\}$;
в) $R_3 = \{\langle a,b\rangle | a \ \ - \ \ \textit{дільник} \ \ (ab+1), a \neq 1\}$.

12. Якими властивостями характеризуються зазначені нижче відношення. Побудувати матриці відношень:
а) відношення, задані на множині членів родини, що складається з 5 чоловік: бабуся, тато, мама, син, дочка, які проживають в 4-х кімнатній квартирі. В 1-й кімнаті - бабуся, в 2-й – мама і тато, в 3-й - син, в 4-й - дочка. За умови, що тато старіший від дружини, дочка старіша від брата, а бабуся - мама татка:

R_4 - “*бути старіше*”;

R_5 - “*бути сином (дочкою)*”;

R_6 - “*мати спільну кімнату*”.

б) відношення, задані на множині міст України: Славута, Рівне, Дубно, Корець, Костопіль, Горохів, Шацьк, Львів, Херсон, Броди, Луцьк:

R_7 - “*знаходитися в одній області*”;

R_8 - “*знаходитися в сусідніх областях (мають спільну межу)*”.

13. Нехай на множині натуральних чисел задані відношення

$R_1 = \{\langle a,b\rangle | b = a+3; \quad a,b \in N\}$ і $R_2 = \{\langle a,b\rangle | b = a^3; \quad a,b \in N\}$.

Визначити відношення: $R_1 \circ R_2$; $R_2 \circ R_1$; $R_1 \circ R_1 = R_1^{(2)}$; $R_2 \circ R_2 = R_2^{(2)}$.

14. На множинах $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{6,7,8,9\}$, $C = \{10,11,12,13\}$ і $D = \{\Delta, \mathrm{O}, *, \nabla\}$ визначені відношення $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ і $T = \subseteq C \times D$ в такий спосіб:

$R = \{\langle 1,7\rangle, \langle 4,6\rangle, \langle 5,6\rangle, \langle 2,8\rangle\}$;

$S = \{\langle 6,10\rangle, \langle 6,11\rangle, \langle 7,10\rangle, \langle 8,13\rangle\}$;

$T = \{\langle 11,\Delta\rangle, \langle 10,\Delta\rangle, \langle 13,*\rangle, \langle 12,\nabla\rangle, \langle 13,\mathrm{O}\rangle\}$.

Визначити відношення:

а) R^{-1} і S^{-1};

б) $R \circ R^{-1}$ і $R^{-1} \circ R$;

в) $S \circ R$ і $S \circ T$;

г) $T \circ (S \circ R)$;

д) $(T \circ S) \circ R$;

е) $R^{-1} \circ S^{-1}$.

15. Нехай $A = \{\langle b,a\rangle, \langle c,e,\rangle, \langle d,i\rangle, \langle f,o\rangle, \langle g,u\rangle\}$ і $B = \{\langle 1,a\rangle, \langle 2,e\rangle, \langle 3,i\rangle, \langle 4,0\rangle, \langle 5,u\rangle\}$. Опишіть відношення: A^{-1}; B^{-1}; $A^{-1} \circ B$; $B^{-1} \circ A$.

16. На множині $A = \{a,b,c,d,e\}$ визначені відношення:

$R_1 = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle b,d\rangle, \langle c,e\rangle, \langle e,d\rangle, \langle c,a\rangle\}$;

$R_2 = \{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,c\rangle, \langle b,d\rangle, \langle e,e\rangle, \langle d,e\rangle, \langle c,b\rangle\}$;

$R_3 = \{\langle a,b\rangle, \langle a,a\rangle, \langle b,c\rangle, \langle b,b\rangle, \langle e,e\rangle, \langle b,a\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,d\rangle, \langle a,c\rangle, \langle c,a\rangle\}$
;

$R_4 = \{\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle b,b\rangle, \langle e,e\rangle, \langle b,a\rangle, \langle c,b\rangle, \langle d,d\rangle, \langle a,c\rangle, \langle c,a\rangle\}$.

Опишіть відношення $R_1 \cup R_2$; $R_3 \cap R_4$; $R_3 - R_2$.

17. Установити істинність або хибність кожного з наведених нижче висловлень. Для кожного помилкового висловлення приведіть контрприклад.

а). Якщо відношення R_1 і R_2 рефлексивні, то кожне з відношень:

$R_1 \cap R_2$; $R_1 \cup R_2$; $R_1 \circ R_2$ і $R_1 - R_2$

рефлексивне.

б). Якщо відношення R_1 і R_2 симетричні, то кожне з відношень:

$R_1 \cap R_2$; $R_1 \cup R_2$; $R_1 \circ R_2$ і $R_1 - R_2$

симетричне.

в). Якщо відношення R_1 і R_2 антисиметричні, то кожне з відношень:

$R_1 \cap R_2$; $R_1 \cup R_2$; $R_1 \circ R_2$ і $R_1 - R_2$

антисиметричне.

г). Якщо відношення R_1 і R_2 транзитивні, то кожне з відношень:

$R_1 \cap R_2$; $R_1 \cup R_2$; $R_1 \circ R_2$ і $R_1 - R_2$

транзитивне.

Контрольні запитання.

1. Дайте означення бінарного відношення.
2. Яке відношення називається рефлексивним?
3. Яке відношення називається транзитивним?
4. Дайте означення відношення на множені.
5. Яке відношення називається симетричним?
6. Яке відношення називається іррефлексивним?
7. Яке відношення називається антисиметричним?
8. Які ви знаєте операції над відношеннями?

Література

1. Лихтарников Л. М., Сукачёва Т. Г. Математическая логика : курс лекций. Задачник-практикум и решения. СПб. : Лань, 1999. 288 с.

2. Матыцина Т. Н. Дискретная математика. Решение рекуррентных соотношений : практикум. Кострома : КГУ им. Н. А. Некрасова, 2010. 35 с.

3. Матурін Ю. П. Елементи дискретної математики : навчальний посібник. Дрогобич : Редакційно-видавничий відділ ДДПУ імені Івана Франка, 2009. 60 с.

4. Нікольський Ю. В., Пасічник В. В. , Щербина Ю. М. Дискретна математика. К. : Видавнича група BHV, 2007. 368 с.

5. Ямненко Р. Є. Дискретна математика. К. : Четверта хвиля, 2010. 104 с.